Développement : exponentielle d'un endomorphisme.

• Vincent Beck, Jérome Malick, Gabriel Peyré - Objectif agrégation [p 215]

<u>Thm</u> : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie (et $u = s + m$ sa décomposition de Dunford). Alors

(i) La décomposition de Dunford de $\exp u$ est $\exp(u) = \exp(s) + \exp(s)m'$

(ii) u diagonalisable $\Leftrightarrow \exp(u)$ l'est

(iii) $\exp(u) = id \Leftrightarrow u$ diagonalisable et $\mathrm{Spec}(u) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$

Preuve de (i) et (ii) aussi dans Rombaldi - Algèbre et géométrie

Preuve :

(i) On a $u = s + m$ avec s diagonalisable, m nilpotent et $s \circ m = m \circ s$

Comme $s \circ m = m \circ s$ on a $\exp(u) = \exp(s) \circ \exp(m)$

Comme m nilpotent on a $\exp(m) = Id + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{m^k}{k!}}_{m'}$ ⚠ notation mal choisie

(m' nilpotent)

On a alors $\exp(u) = \exp(s) + \exp(s)m'$

Vérifions que : 1) $\exp(s)$ diagonalisable

2) $\exp(s)m'$ nilpotent

3) $\exp(s)$ et $\exp(s)m'$ commutent

$\to$ 1) comme s est diagonalisable, $\exp(s)$ l'est aussi (Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de s est D diagonale. La matrice de $\underline{\exp(s)}$ (coquille Beck) est alors la matrice diagonale $\exp(D)$, puisque l'application
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to M_n(\mathbb{C}) \\ u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$
est un homéomorphisme.

En effet, l'application φ est continue puisque linéaire et issue d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et φ^{-1} est aussi continue pour les mêmes raisons).

3) Comme s et m commutent, $\exp(s)$ et $\exp(m)$ commutent. Ainsi les endomorphismes $\exp(s)$ et $m' = \exp(m) - id$ commutent. On en déduit alors que $\exp(s)$ et $\exp(s)m'$ commutent et que :

2) $(\exp(s)m')^l = \exp(s)^l m'^l$ pour tout l.

Comme m' est nilpotent, la dernière égalité assure que $\exp(s)m'$ l'est aussi

L'unicité de la <u>décomposition de Dunford permet</u> de conclure que la décomposition de Dunford est $\boxed{\exp(u) = \exp(s) + \exp(s)m'}$

(ii) Remarquons qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la partie nilpotente de sa décomposition de Dunford est nulle. [Lemme]

(En effet, si u diagonalisable alors on vérifie facilement que $u = u + 0$ est <u>sa</u> décomposition de Dunford. Réciproquement, si $u = d + m$ est la décomposition de Dunford de u avec $m = 0$, alors $u = d$ est diagonalisable)

Ce lemme permet de répondre/démontrer (ii) à partir des notations de (i) :

$\exp(u) = \exp(s) + \exp(s)m'$ où $u = s + m$, $m' = \exp(m) - id$

$\Rightarrow$ Si u diagonalisable, on a $m = 0$ donc $\exp(m) = id$ et $m' = 0$

On en déduit que $\exp(s)m' = 0$.

La partie nilpotente de la décomposition de Dunford de ~~...~~ $\exp(u)$ est nulle et $\exp(u)$ est donc diagonalisable

$\Leftarrow$ Si $\exp(u)$ diagonalisable, alors d'après ce qui précède $\exp(s)n' = 0$. Comme $\exp(s)$ est inversible, on en déduit que $n' = 0$. On a donc $\exp(n) = Id$ d'où [Rombaldi] $P(X) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{q} X^k$ (où q indice de nilpotence de n) est un polynôme annulateur de n. Or X^q est le polynôme minimal de n et va diviser P, ce qui impose $q=1$ (on a $\frac{1}{q!} = 1$ en identifiant les termes de degré q).

(iii) Ce résultat repose sur l'égalité $\underbrace{\exp(\mathrm{Spec}(u)) = \mathrm{Spec}(\exp(u))}_{=(ii)}$ trigonalisabilité + continuité

$\Rightarrow$ Si $\exp(u) = id$ alors d'après la question précédente, u est diagonalisable. De plus, comme $\exp(\mathrm{Spec}(u)) = \mathrm{Spec}(\exp(u)) = \{1\}$, on en déduit que $\mathrm{Spec}(u) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

$\Leftarrow$ Si $\mathrm{Spec}(u) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$ et si u diagonalisable alors par (ii), $\exp(u)$ est diagonalisable.
De plus, comme $\mathrm{Spec}(\exp(u)) = \exp(\mathrm{Spec}(u)) = \{1\}$ on en déduit que 1 est la seule valeur propre de $\exp(u)$. Finalement $\exp(u) = id$ puisque $\exp(u)$ diagonalisable avec 1 comme unique valeur propre.